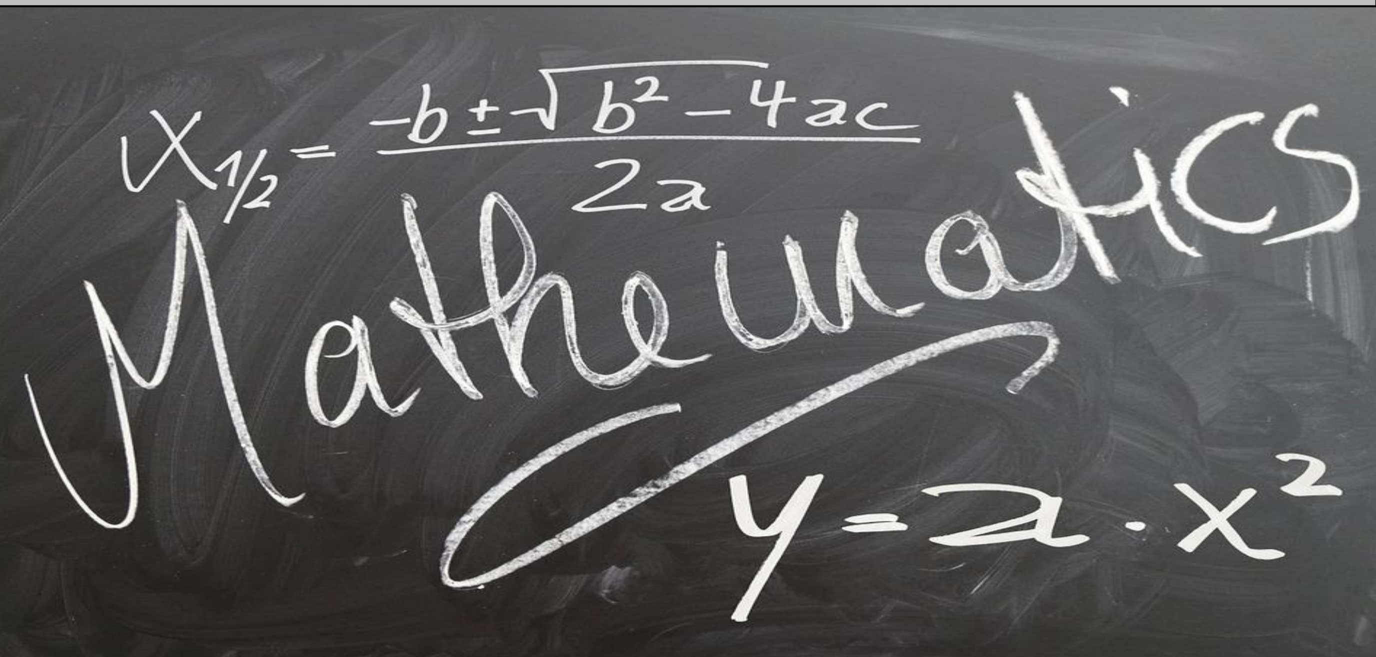
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

www.askisopolis.gr

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:

-Θετικών σπουδών

-Οικονομίας και Πληροφορικής

2019-2020

Η ΑΣΚΗΣΗ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Επαναληπτική άσκηση έως και την εφαπτομένη γραφικής παράστασης.

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Αν η g είναι συνεχής με $g(\xi)=1$, $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ και $g(-1)+g(0)=2$ τότε:

α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε1) της C_f στο $A(1,f(1))$.

β) Να αποδείξετε ότι η (ε) σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες του οποίου να βρείτε το εμβαδόν του.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)+2f'(x+2)+3f'(x+3)=2020$ έχει το πολύ τρεις ρίζες και η μία από αυτές είναι θετική.

δ) Να αποδείξετε ότι η g δεν είναι συνάρτηση 1-1.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=-\frac{\alpha f(x)}{8}$, $x>0$ και τελικά έχουμε $g(x)=\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$. Αν οι εφαπτομένες των C_g και C_h στα σημεία τους $B(x1,g(x1))$ και $\Gamma(x1,h(x1))$ αντίστοιχα με $x1>0$, είναι μεταξύ τους κάθετες τότε:

ε) Να βρείτε το αριθμό $\alpha>0$.

<u>Νίκος Τούντας</u>

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

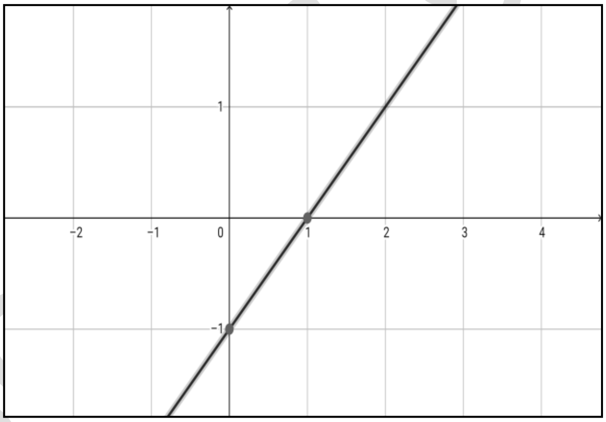
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

α) $f(x)=\ln x\,, x>0$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως λογαριθμική με $f'(x)=\frac{1}{x}\,, x>0$.

Έχουμε $f(1)=\ln 1=0$ και $f'(1)=\frac{1}{1}=1$άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο $A\big(1,f(1)\big)$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$$

β) $(\varepsilon): y=x-1$ και έχουμε για $x=0: y=-1$ άρα η (ε) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $K(0,-1)$ και για $y=0: x=1$ άρα η (ε) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(1,0)$.



Έχουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ με κάθετες πλευρές τις $(OK)=1$ και $(0A)=1$ και υποτείνουσα την $(AK)=\sqrt{2}$ (Από πυθαγόρειο θεώρημα) άρα το τρίγωνο ΑΟΚ είναι ισοσκελές.

Έχουμε $\text{Εμβαδόν}(AOK)=\frac{1}{2}(OK)(OA)=\frac{1}{2}$ τ.μονάδες

γ) $f'(x)+2f'(x+2)+3f'(x+3)=2020\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}=2020\Leftrightarrow$

$.\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+3)+2x(x+3)+3x(x+2)+2020x(x+2)(x+3)}{x(x+2)(x+3)}=0$ με $x>-2$ γιατί από το πεδίο ορισμού της f΄ πρέπει $x>-2$ και από τον παρονομαστή $x\neq 0,-2,-3$

ΘΕΤΩ $k(x)=(x+2)(x+3)+2x(x+3)+3x(x+2)-2020x(x+2)(x+3), x\in\mathbb{R}$

Η k είναι συνεχής ως πολυωνιμική.

$$k(0)=6>0$$

$$k(1)=12+8+9-12\cdot 2020<0$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $(0,1)$ προκύπτει ότι η k έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ άρα έχει τουλάχιστον μία ρίζα θετική. Επίσης επειδή η k είναι πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού θα έχει το πολύ 3 ρίζες. Οι ρίζες της k είναι και ρίζες της εξίσωσης άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

δ) **<u>1ος Τρόπος:</u>** $g(\xi)=1$ και $g(-1)+g(0)=2\Leftrightarrow\frac{g(-1)+g(0)}{2}=1$

<u>Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:</u>

1η Περίπτωση: Αν $g(-1)=g(0)$ τότε $g(-1)=g(0)=g(\xi)=1$ τότε η g προφανώς δεν είναι 1-1.

2η Περίπτωση: Αν $g(-1)<g(0)$ τότε $g(-1)<\frac{g(-1)+g(0)}{2}<g(0) \Leftrightarrow g(-1)<1<g(0)$ και αφού η g είναι συνεχής από ΘΕΤ υπάρχει $xo \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(xo)=1=g(\xi)$ με $\xi \neq xo$ άρα η g δεν είναι 1-1.

3η Περίπτωση: Αν $g(-1)>g(0)$ τότε ομοίως με την 2η Περίπτωση υπάρχει $xo \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(xo)=1=g(\xi)$ με $\xi \neq xo$ άρα η g δεν είναι 1-1.

Άρα η g δεν είναι 1-1 σε κάθε περίπτωση άρα η g δεν είναι 1-1.

<u>2ος Τρόπος από τον Στέλιο Μιχαήλογλου:</u> Επειδή η g είναι συνεχής στο $[-1,0]$ τότε από ΘΜΕΤ η g έχει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m στο διάστημα αυτό και από ΘΕΤ το $[m, M]$ είναι το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό. Έχουμε:

$$m \leq g(-1) \leq M$$

$$+\, m \leq g(0) \leq M$$

$$2m \leq g(-1)+g(0) \leq 2M \Leftrightarrow 2m \leq 2 \leq 2M \Leftrightarrow m \leq 1 \leq M \Leftrightarrow m \leq g(\xi) \leq M$$

Άρα το $g(\xi)$ ανήκει στο σύνολο τιμών της g στο $[-1,0]$ άρα υπάρχει $xo \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $g(xo)=1=g(\xi)$ με $\xi \neq xo$ άρα η g δεν είναι 1-1.

<u>3ος Τρόπος:</u>

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Αν η f ήταν 1-1 τότε αφού είναι συνεχής θα είναι και γνησίως μονότονη.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$ ή $f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$. Έστω ότι δεν ισχύει η προηγούμενη πρόταση και $\alpha<\beta<\gamma$ με $f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$, επειδή $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και η f είναι συνεχής στο [α,β] από ΘΕΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq A$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=f(\gamma) \overset{f\,1-1}{\Longleftrightarrow} \xi=\gamma$ ΑΤΟΠΟ γιατί $\gamma \notin (\alpha, \beta)$. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

Τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

<u>1η Περίπτωση:</u> Αν η g ↗ τότε: $-1<0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(-1)<g(0)$ και επειδή $g(-1)+g(0)=2$ τότε $g(0)>1$ και $g(-1)<1$ όμως $0<\xi \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(0)<g(\xi) \Leftrightarrow g(0)<1$ ΑΤΟΠΟ

<u>2η Περίπτωση:</u> Αν η g ↘ τότε: $-1<0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(-1)>g(0)$ και επειδή $g(-1)+g(0)=2$ τότε $g(0)<1$ και $g(-1)>1$ όμως $0<\xi \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(0)>g(\xi) \Leftrightarrow g(0)>1$ ΑΤΟΠΟ

Άρα η g δεν είναι γνησίως μονότονη άρα προφανώς η g δεν είναι 1-1.

ε) Έχουμε $h(x) = -\frac{\alpha f(x)}{8} = -\frac{\alpha \ln x}{8}, x > 0$ συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = -\frac{\alpha}{8x}, x > 0$

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $g'(x) = 2\alpha x, x \in \mathbb{R}$

Για να είναι οι εφαπτομένες των C_g και C_h στα σημεία τους $B(x1, g(x1))$ και $\Gamma(x1, h(x1))$ αντίστοιχα με $x1 > 0$, είναι μεταξύ τους κάθετες πρέπει:

$$h'(x1) \cdot g'(x2) = -1 \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{8x1} \cdot 2\alpha x1 = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2$$

Δεκτή η $\alpha = 2$ γιατί $\alpha > 0$.